INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES

MAI 1991 TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 2 heures)

Le correcteur tiendra le plus grand compte du soin qu'apporteront les candidats à la présentation de leurs copies et à la rédaction. Le correcteur souhaite vivement que les candidats soulignent -dans chaque démonstration- le point (ou l'idée) qui leur semble le plus important.

Les candidats pourront traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes de l'énoncé à condition de le mentionner explicitement.

NOTATIONS

T désigne un réel $\geqslant 0$. $C^0([0,T])$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[0,T]$ et à valeurs complexes. On munit $C^0([0,T])$ du produit scalaire :

$$(f \mid g) = \int_0^T f(t)\,\bar{g}(t)\,dt, \quad f,g \in C^0([0,T])$$

et de la norme

$$\|f\| = \left[\int_0^T |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2} = [(f \mid f)]^{1/2}, \quad f \in C^0([0,T]).$$

. Soit $M \in \mathbb{N}^*$, $V_M(T)$ désigne le sous-espace vectoriel de $C^0([0,T])$ constitué des fonctions de la forme

$$t \longrightarrow \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k\, e^{-\frac{2i\pi}{T}kt}, \quad t \in [0,T], \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0,1,2,\ldots,M-1.$$

. On admettra le théorème de Weierstrass qui affirme que toute fonction continue sur $[0,T]$ à valeurs complexes est limite uniforme sur $[0,T]$ d'une suite de polynômes.

PROBLEME

1°] $C^0([0,T])$ muni de la norme $\|\ \|$ est-il complet ?

Justifier votre réponse.

2°] Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

a] Montrer que la fonction définie par :

$$\omega \longrightarrow g(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{2i\pi t\omega}\,dt \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Etudier les limites de $g(\omega)$ quand ω tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

b] Dans la suite du problème on suppose qu'il existe un réel t_0, une constante positive K et une constante $\alpha > 1$ tels que

$$\forall\, t \geqslant t_0 \qquad |f(t)| \leqslant \frac{K}{t^\alpha}.$$

On pose $g_T(\omega) = \int_0^T f(t)\, e^{2i\pi t\omega}\,dt$,

soit $\varepsilon > 0$, déterminer une valeur de T telle que $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$, $|g(\omega) - g_T(\omega)| \leqslant \varepsilon$.

A SUIVRE

c] Dans le cas particulier où $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, calculer explicitement $g(\omega) + g(-\omega)$ pour tout réel ω. (On pourra faire une intégration par parties et mettre en évidence une équation différentielle du 2ème ordre).

d] Dans cette question et dans cette question seulement, on suppose qu'il existe $T_o > 0$ tel que $\forall\, t \geqslant T_o$ $f(t) = 0$ et $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ $g(\omega) = 0$.

Prouver alors que $f \equiv 0$. (On pourra utiliser le développement en série de e^z).

3°] Soit $T > 0$ et $h \in C^o([0,T])$. Montrer qu'il existe une fonction unique $\psi \in V_M(T)$,

$$\psi(t) = \sum_{k=o}^{M-1} \alpha_k \, e^{-\frac{2i\pi kt}{T}}$$

telle que l'on ait $\|h - \psi\| = \min_{\varphi \in V_M(T)} \|h - \varphi\|$.

. Etablir les formules donnant les α_k et $e_M(h) = \|h - \psi\|$.

. T étant fixé, que peut-on dire de la suite $(e_M(h))_{M \in \mathbb{N}^*}$ lorsque M tend vers $+\infty$?

Justifier votre réponse.

4°] L'entier M étant supérieur à 1 et le nombre réel Ω étant positif, on se propose de calculer approximativement, pour les M valeurs $\omega_r = rk$ de l'intervalle $[0,\Omega]$ obtenues pour $k = \frac{\Omega}{M}$ et $r = 0,1,\ldots,M-1$ les valeurs

$$g_T(\omega_r) = \int_o^T f(t)\, e^{2i\pi\, \omega_r t}\, dt$$

de $g_T(\omega)$. (On reprend les conventions et hypothèses de 2°]a] et 2°]b]).

Soit N un entier naturel $\geqslant 2$. On pose $k' = \frac{T}{N}$ et $t_s = sk'$ avec $s \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$.

Pour $r \in \{0,1,2,\ldots,M-1\}$ on pose alors $g_r = k' \sum_{s=o}^{N-1} f(t_s)\, e^{2i\pi\, \omega_r t_s}$

(g_r est une "approximation" de $g_T(\omega_r)$).

Soit g le vecteur de $\mathbb{C}^M$ de composantes g_r $(r = 0,1,\ldots,M-1)$.

On pose $f_s = f(t_s)$ et on appelle f le vecteur de $\mathbb{C}^N$ de composantes f_s $(s = 0,1,\ldots,N-1)$.

Tournez la page S.V.P.

Donner une formule liant entre eux les paramètres Ω, T, M de sorte que les composantes de g s'obtiennent à partir de celles de f par une transformation linéaire du type :

$$(1) \qquad g_r = k' \sum_{s=o}^{N-1} e^{\frac{2i\pi rs}{N}} f_s \qquad (r = 0,1,\ldots,M-1)$$

soit, sous forme matricielle :

$$g = k'(\mathfrak{C}.f)$$

où $\mathfrak{C}$ désigne une matrice de type (M,N) (i.e à M lignes et N colonnes).

. Expliquer comment utiliser $\mathfrak{C}.f$ pour obtenir un calcul approximatif des nombres α_r $(r = 0,1,\ldots,M-1)$ de la question 3°] dans le cas où $h = f\,|_{[0,t]}$.

5°] On pose $u_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ On suppose que les nombres complexes f_s $(s = 0,1,\ldots,N-1)$ sont donnés ainsi que le nombre réel k'. Proposer une méthode simple (n'utilisant que les deux opérations élémentaires : addition de deux nombres complexes et multiplication de deux nombres complexes) pour obtenir à partir de ces données les nombres complexes

$$g_r \quad (r = 0,1,\ldots,M-1) \ .$$

$$(2) \qquad g_r = k' \sum_{s=o}^{N-1} (u_N)^{rs} f_s \ .$$

Indiquer les nombres n_s et n_p d'opérations élémentaires, addition et multiplication, qui sont nécessaires. On étudiera en particulier le cas suivant :

$$M = N = 2^n \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$

6°] On suppose M = N et on désigne par $\mathfrak{C}$ la matrice carrée d'ordre N dont le terme situé sur la $(r+1)^{ème}$ ligne et la $(s+1)^{ème}$ colonne vaut

$$u_N^{rs} \qquad r,s = 0,1,\ldots,N-1 \ .$$

Montrer que $\mathfrak{C}$ est inversible et calculer $\mathfrak{C}^{-1}$.

FIN